Ref : Demailly, p. 97
Analyse numérique et équation différentielle

Classification des points fixes dans $\mathbb{R}$:

Leçons : 226, 223

Proposition : Soit $f : I \to I$ de classe $\mathcal{C}^1$ où I est un segment de $\mathbb{R}$. Soit a un point fixe de f. Alors on distingue trois cas :

1) Si $|f'(a)| < 1$, alors a est attractif.
2) Si $|f'(a)| > 1$, alors a est répulsif
3) Si $|f'(a)| = 1$, on ne peut rien dire a priori : Étude de trois exemples

Étude détaillée : * 1) $\exists k < 1$ tel que $|f'(a)| < k$. De plus, f' est continue, donc on peut réécrire la condition $|f'(a)| < k$ de la manière suivante :

$$\exists h > 0, \forall x \in [a-h, a+h] : \left| \frac{f(x) - f(a)}{x-a} \right| \leq k.$$

f est donc contractante sur $E = [a-h, a+h]$ avec $f(E) \subset E$.

$\Rightarrow$ a est un point fixe attractif dont le bassin d'attractivité contient au moins E.

* Pour aller plus loin : On peut my la cvg de $(u_{n+1} = f(u_n))$ prise dans le bassin d'attraction est expo. rapide. Si $u_0 \in E$, on a alors :

~~$|u_1 - a| \leq k|u_0 - a|$~~

$$|u_1 - a| = |f(u_0) - f(a)| \quad (\text{car } a \text{ pt. fixe de } f)$$
$$\leq k|u_0 - a| \quad (f \text{ contractante})$$

et de fil en aiguille, $|u_n - a| \leq k^n |u_0 - a| = e^{n\ln(k)}|u_0 - a|$.

* Cas particulier : $f'(a) = 0$. Supposons f $\mathcal{C}^2$ avec $\|f''\|_E \leq M$ avec $M > 0$. Soit $x \in E$. On a alors : $\exists c \in]a, x[$ tq :

$$f(x) = f(a) + \underbrace{f'(a)}_{=0}(x-a) + \frac{(x-a)^2}{2} f''(c)$$

$$\Rightarrow |f(x) - a| \leq \frac{(x-a)^2}{2} M, \text{ ou bien } \left(\frac{M}{2}|f(x) - a|\right) \leq \left(\frac{M}{2}(x-a)\right)^2.$$

Donc : $\frac{M}{2}|u_n - a| \leq \left(\frac{M}{2}|u_0 - a|\right)^{2n}$, soit $|u_n - a| \leq \frac{2}{M}\left(\frac{M}{2}|u_0 - a|\right)^{2n}$

qui nous donne la vitesse de cvg.

Remarque : Il faut exiger $|u_0 - a| \leq \frac{2}{M}$ pour ~~...~~ garantir une cvg. On parle de cvg quadratique et de pt. fixe superattractif.

* 2) Si $|f'(a)| \geq 1$, on peut par continuité assurer qu'il existe $h \in I$ tq $\forall x \in [a-h, a+h] \setminus \{a\} := E$, on a $|f(x) - a| > |x-a|$ (similaire au k du 1)
Alors a est un pt. fixe répulsif admettant comme bassin de répulsion au moins E.

* <u>Néanmoins</u> : On peut remarquer que $|f'(a)| \geq 1$ implique qu'il existe $E' = [a-h', a+h']$ tq $|f'| > 0$ sur E'. f est alors strictement monotone sur E', et on peut définir $f^{-1}: f(E') \to E'$ avec $f(a) = a$ donc $f^{-1}(a) = a$.
a est encore point fixe de f^{-1}, et on a :

- $y = f^{-1}(x) \iff x = f(y) \iff 1 = f'(y)\, y'$

donc $y' = \frac{1}{f'(y)}$

c'est à dire $(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

En évaluant, on a $(f^{-1})'(a) = \frac{1}{f'(f^{-1}(a))} = \frac{1}{f'(a)}$, donc $|(f^{-1})'(a)| < 1$.

$\to$ a est pt. fixe attractif de f^{-1}.

* 3) Si $f'(a) = 1$, donnons ~~deux~~ trois exemples en $a = 0$. (et $a = 1$)

- $f_1 = \sin$, $f_2 = \sinh$, $f_3(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}$

<u>f_1</u> : On a $\sin(0) = 0$, et $\sin'(x) = \cos(x)$, donc $\sin'(0) = 1$.
et $\forall x$ dans un voisinage de 0, $x \neq 0$, on a <u>$\cos(x) < 1$</u>

Soit x proche de 0. $\exists h > 0, E =]x-h, x+h[\subset]0, \frac{1}{2}[$ (ou $]-\frac{1}{2}, 0[$).
Alors $\cos(x) < 1$ sur E et $\sin$ est contractante.
$\hookrightarrow$ 0 est attractif.

<u>f_2</u> : On a $\sinh(0) = 0$ et $\sinh'(x) = \cosh(x)$, donc $\sinh'(0) = 1$.
<u>Mais</u> : $\forall x$ dans un voisinage de 0 avec $x \neq 0$, <u>$\cosh(x) > 1$</u>
Par le même procédé, 0 est point fixe répulsif de $\sinh$.

<u>f_3</u> : $\frac{x^2+1}{2} = x \iff x = 1$ pt. fixe. On a $f_3'(x) = x$,
donc $\begin{cases} f_3'(x) > 1 \text{ sur }]1, +\infty[\\ f_3'(x) < 1 \text{ sur }]-\infty, 1[\end{cases}$ a priori répulsif après a, attractif avant a.